التمرين الاول (البنيات الجبرية)

1) أ) لدينا: $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2);x*y=x+y-2=y+x-2=y*x$

إذن $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2);x*y=y*x$

ومنه القانون $*$ تبادلي.

و لدينا

$$(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3);(x*y)*z=(x*y)+z-2=x+y-2+z-2=x+(y+z-2)-2=x+(y*z)-2=x*(y*z)$$

إذن $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3);(x*y)*z=x*(y*z)$

و منه القانون $*$ تجميعي

خلاصة :

$\boxed{\text{القانون } * \text{ تبادلي.و تجميعي}}$

ب) ليكن e من $\mathbb{Z}$ $(\forall x\in\mathbb{Z});x*e=x\Leftrightarrow x+e-2=x\Leftrightarrow e=2$ و بما أن $*$ تبادلي فإن

$\boxed{2 \text{ هو العنصر المحايد ل } *}$

ج) ليكن x و y من $\mathbb{Z}$

$x*y=2\Leftrightarrow x+y-2=2\Leftrightarrow y=4-x$

إذن لكل x من $\mathbb{Z}$ مماثل بالنسبة ل $*$ هو $4-x$

القانون $*$ تبادلي.و تجميعي ويقبل عنصرا محايد هو 2 و لكل x من $\mathbb{Z}$ مماثل بالنسبة ل $*$ هو $4-x$

إذن

$\boxed{(\mathbb{Z},*) \text{ زمرة تبادلية.}}$

2) أ) لدينا $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2);f(x)\mathrm{T}f(y)=(x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6$

$$=xy+2x+2y+4-2x-4-2y-4+6$$
$$=xy+2$$
$$=f(xy)$$

إذن $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2);f(x\times y)=f(x)\mathrm{T}f(y)$

نستنتج أن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

وبما أن لكل x من $\mathbb{Z}$ سابق و حيد ب f في $\mathbb{Z}$ هو $x-2$ فإن f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ و منه :

$\boxed{f \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{Z},\times) \text{ نحو } (\mathbb{Z},\mathrm{T})}$

ب) لدينا $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3);(x*y)\mathrm{T}z=(x+y-2)\mathrm{T}z$

$$=(x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6$$
$$=(xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2$$
$$=(x\mathrm{T}z)+(y\mathrm{T}z)-2$$
$$=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$$

و منه

$$\boxed{(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3);(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)}$$

3) لدينا $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2);x\mathrm{T}y=y\mathrm{T}x$ إذن القانون T تبادلي.

وحسب السؤال 2) ب) نستنتج أن القانون T توزيعي على القانون $*$

بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$ و $\times$ تجميعي في $\mathbb{Z}$ فإن T تجميعي في $\mathbb{Z}$

و بما أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية و T تجميعي و تبادلي و توزيعي على القانون $*$ فإن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية

لنبين أن القانون T يقبل عنصرا محايدا e في $\mathbb{Z}$

$$(\forall x\in\mathbb{Z}),\ x\mathrm{T}e=x \Leftrightarrow xe-2x-2e+6=x$$
$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{Z};\ x(e-3)=2(e-3)$$
$$\Leftrightarrow e=3$$

إذن $\forall x\in\mathbb{Z};\ x\mathrm{T}3=3\mathrm{T}x=x$ ومنه 3 هو العنصر المحايد للقانون T

نستنتج من كل ما سبق أن

$\boxed{(\mathbb{Z},*,\mathrm{T}) \text{ حلقة تبادلية و واحدية}}$

4) أ) لدينا

$$x\mathrm{T}y=2 \Leftrightarrow xy-2x-2y+6=2$$
$$\Leftrightarrow xy-2x-2y+4=0$$
$$\Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ أو } y=2$$

إذن

$\boxed{x\mathrm{T}y=2 \ \Leftrightarrow x=2 \text{ أو } y=2}$

ب) لدينا $x\mathrm{T}y=2 \ \Leftrightarrow x=2 \text{ أو } y=2$ حيث 2 هو صفر الحلقة $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$

إذن

$\boxed{(\mathbb{Z},*,\mathrm{T}) \text{ حلقة كاملة}}$

ج) لدينا $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية و واحدية

و لدينا $(\forall x\in\mathbb{Z}/\{2\});\ x\mathrm{T}y=3 \Leftrightarrow xy-2x-2y+6=3$

$$\Leftrightarrow y(x-2)=2x-3$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{2x-3}{x-2}$$

من أجل $x=5$ نحصل على $y=\frac{7}{3}\notin\mathbb{Z}$

إذن 5 ليس له مقلوبا بالنسبة ل T

نستنتج أن

$\boxed{(\mathbb{Z},*,\mathrm{T}) \text{ ليس جسم}}$

التمرين الثاني

I

1) مميز المعادلة: $(E): 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$

لدينا $\Delta=\left(3+i\sqrt{3}\right)^2a^2-8\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=\left(9+6i\sqrt{3}-3-8\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)a^2=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)a^2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$

إذن

$$\boxed{\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 a^2}$$

2) بما أن $a\in\mathbb{C}^*$ فإن ل (E) حلين مختلفين هما :

$$z_1=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=\frac{a+ai\sqrt{3}}{2} \text{ و } z_2=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=a$$

ومنه مجموعة حلول (E) هي :

$$\boxed{S=\left\{a,\frac{a+ai\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

II

1) لدينا

$$\frac{a}{b}=e^{i\frac{-\pi}{3}}\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{a}{b}\right|=1\\ \arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{OA}{OB}=1\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$

إذن

$$\boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متساوي الأضلاع}}$$

2) أ) لدينا r دوران مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$ إذن r^{-1} دوران مركزه M و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

إذن

$$\begin{cases}B_1=r(B)\\ A_1=r^{-1}(A)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z)\\ a_1-z=e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1=z+\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(a-z)\\ b_1=z+\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(b-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+z\left(1-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\ b_1=z\left(1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1 = z\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a \end{cases}$$

و منه

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{aligned}}$$

ب) لدينا $a_1 + b_1 = z$ إذن $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OM}$ و منه

$\boxed{\text{الرباعي } OA_1MB_1 \text{ متوازي أضلاع}}$

3) أ) لدينا

$$\begin{cases} a_1 - z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 - z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - a_1 = e^{i\frac{-\pi}{3}}(z-a) \\ b_1 - z = ae^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - z = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a) \\ b_1 - z = -e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - ae^{i\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = -e^{i\frac{-\pi}{3}}\frac{\left(z - a\times\frac{b}{a}\right)}{z-a}$$

$$\Rightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{a}{b}\times\frac{(z-b)}{z-a}$$

و أخيرا

$$\boxed{\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{a}{b}\times\frac{z-b}{z-a}}$$

ب) المثلث OAB متساوي الأضلاع إذن النقط M وO وA و B غير مستقيمية .

ومنه النقط M وO وA و B متداورة $\Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z} \div \frac{b-0}{a-0} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}$$
$\Leftrightarrow$ M و A_1 و B_1 مستقيمية

نستنتج أن

$$\boxed{\text{النقط } M \text{ و} O \text{ و} A \text{ و} B \text{ متداورة يكافئ } M \text{ و } A_1 \text{ و } B_1 \text{ مستقيمية}}$$

التمرين الثالث (الحسابيات)

1) أ) لدينا $n>1$ و يحقق $(R):3^n-2^n\equiv 0[n]$ و p أصغر قاسم أولي موجب ل n

إذن $\begin{cases} n\,|\,3^n-2^n \\ p\,|\,n \end{cases}$ و منه $p\,|\,3^n-2^n$ و بالتالي $3^n-2^n\equiv 0[p]$

لنبين أن $p\geq 5$

لدينا $\left(p=2\Rightarrow\begin{cases}2\,|\,2^n\\2\,|\,3^n-2^n\end{cases}\Rightarrow 2\,|\,3^n\Rightarrow 2\,|\,3\right)$ و $\left(p=3\Rightarrow\begin{cases}3\,|\,2^n\\3\,|\,3^n-2^n\end{cases}\Rightarrow 3\,|\,2^n\Rightarrow 3\,|\,2\right)$

و بما أن 2 لايقسم 3 و 3 لايقسم 2 فإن (الإستلزام المضاض للعكس) $p\neq 2$ و $p\neq 3$ نستنتج أن $p\geq 5$

ومنه

$$\boxed{3^n-2^n\equiv 0[p] \text{ و } p\geq 5}$$

ب) بما أن $p\geq 5$ فإن p لايقسم 2 و p لايقسم 3

إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى

$$\boxed{2^{p-1}\equiv 1[p] \text{ و } 3^{p-1}\equiv 1[p]}$$

ج) بما أن p أصغر قاسم أولي موجب ل n فإن جميع قواسم $p-1$ لا تقسم n باستثناء 1

نستنتج أن $(p-1)\wedge n=1$

إذن حسب مبرهنة بوزو يوجد (α,β) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $\alpha n+\beta(p-1)=1$

و بوضع $\alpha=a$ و $b=-\beta$ نحصل على المطلوب

$$\boxed{\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2; an-b(p-1)=1}$$

د) لدينا $\begin{cases}an-b(p-1)=1\\a=q(p-1)+r\end{cases}\Rightarrow 1+b(p-1)=nq(p-1)+nr\Rightarrow nr=1+(b-nq)(p-1)$

بوضع $k=b-nq$ نحصل على $nr=1+k(p-1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بقي أن نبين أن $k\in\mathbb{N}$
يكفي أن نبين أن $r\geq 1$
حسب السؤال ج) لدينا $(p-1)\wedge a=1$ و بما أن $p-1\geq 4$ فإن $p-1$ لايقسم a ومنه $r\geq 1$
وبما أن $n>1$ فأن $nr>1$ و من $nr-1=k(p-1)$ نستنتج أن : $k\in\mathbb{N}$

خلاصة

$$\boxed{\text{يوجد عدد صحيح طبيعي } k \text{ يحقق } nr=1+k(p-1)}$$

2) نفترض أنه يوجد $n>1$ و يحقق الخاصية (R)
لدينا حسب السؤال ب) $2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$ و لدينا $k\in\mathbb{N}$ إذن $2^{k(p-1)}\equiv 1[p]$ و $3^{k(p-1)}\equiv 1[p]$
و بما أن $nr-1=k(p-1)$ فإن $2^{nr-1}\equiv 1[p]$ و $3^{nr-1}\equiv 1[p]$ و منه $3^{nr}\equiv 3[p]$ و $2^{nr}\equiv 2[p]$
نستنتج أن $3^{nr}-2^{nr}\equiv 1[p]$ (1)
و حسب السؤال 1) أ) $3^{n}-2^{n}\equiv 0[p]$
يعني أن $3^{n}\equiv 2^{n}[p]$ أي أن $3^{nr}\equiv 2^{nr}[p]$ ما يعني أن $3^{nr}-2^{nr}\equiv 0[p]$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن $1\equiv 0[p]$ أي أن p يقسم 1 ز هذا تناقظ
إذن الإفتراض الأول خاطئ
خلاصة:

$$\boxed{\text{لا يوجد عدد صحيح طبيعي } n \text{ أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية } (R)}$$

المسألة

الجزء الأول

1) أ) لدينا $\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{\ln x}{x-1}}=1=h(1)$ (لأن $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$)
نستنتج أن

$$\boxed{h \text{ متصلة على يمين 1}}$$

ب) لدينا $(\forall t\geq x>1);\frac{1}{t}<1\Rightarrow\int_1^x\frac{1}{t}dt<\int_1^x 1dt\Rightarrow \ln x<x-1$
إذن

$$\boxed{(\forall x>1);\ln x<x-1}$$

لدينا $(\forall x>1);h'(x)=\frac{x\ln x-(x-1)(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}=\frac{\ln x-(x-1)}{(x\ln x)^2}$
و بما أن $(\forall x>1);\ln x<x-1$ فإن $(\forall x>1);h'(x)<0$
إذن

$$\boxed{h \text{ تناقصية قطعا على }]1,+\infty[}$$

2) أ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ (لأن $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}$$

جدول تغيرات h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$1 \searrow$	0

ب) بما أن h متصلة و تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$ فإن $h([1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x); h(1)\right] =]0,1]$

ومنه $\forall x \geq 1; h(x) \in]0,1]$

نستنتج أن

$$\boxed{\forall x \geq 1; 0 < h(x) \leq 1}$$

الجزء الثاني

1) أ) لدينا $(\forall x>1); \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} = \ln|\ln x^2| - \ln|\ln x| = \ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right| = \ln 2$

إذن

$$\boxed{\forall x>1; \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2}$$

ب) لدينا

$$(\forall x>1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right)dt = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt}$$

ج) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير و بوضع $\sqrt{t} = \alpha$ نحصل على

$$\begin{cases} t = x \Rightarrow \alpha = \sqrt{t} = \sqrt{x} \\ t = x^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{t} = x \\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dt = 2\sqrt{t}\,d\alpha \end{cases}$$

ومنه $(\forall x>1); g(x)-g(2)=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\alpha-1}{\alpha^2\ln\alpha^2}2\alpha d\alpha=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\alpha-1}{\alpha\ln\alpha}d\alpha=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$

نستنتج أن

$$\boxed{(\forall x>1); g(x)-g(2)=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt}$$

2) أ) لدينا $\forall x>1; \sqrt{x}\le t\le x$

h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$ و $\forall x>1, [\sqrt{x},x]\subset]1,+\infty[$ إذن h تناقصية قطعا على $[\sqrt{x},x]$

و منه $\forall x>1; \sqrt{x}\le t\le x \Rightarrow h(x)\le h(t)\le h(\sqrt{x}) \overset{(x>\sqrt{x})}{\Rightarrow} \int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(\sqrt{x})dt$

$$\Rightarrow (x-\sqrt{x})h(x)\le g(x)-\ln 2\le (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

و بالتالي

$$\boxed{(\forall x>1); (x-\sqrt{x})h(x)\le g(x)-\ln 2\le (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}$$

ب) لدينا حسب 2) أ) من الجزء الثاني $(\forall x>1); \frac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x-1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x-1}$

و بعد إختزال $\sqrt{x}-1$ نحصل على $(\forall x>1); \frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{\sqrt{x}h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}$

و بما أن $\frac{1}{2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1}$ فإن $\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$

نستنتج أن

g قابلة للإشتقاق غلى يمين 1 و أن $g'_d(1)=\frac{1}{2}$

ج) لدينا $(\forall x>1); (x-\sqrt{x})h(x)\le g(x)-\ln 2$

يستلزم $(\forall x>1); (x-\sqrt{x})\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2\le g(x)$

و لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}(\sqrt{x}-1)\frac{x-1}{x}+\ln 2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln 2=+\infty$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$$

كما لدينا $(\forall x>1);\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)+\ln 2}{x}\le\dfrac{g(x)}{x}\le\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)+\ln 2}{x}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\dfrac{x-1}{x\ln x}+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\ln 2}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x\ln\sqrt{x}}+\dfrac{\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{\ln\sqrt{x}}+\dfrac{\ln 2}{x}=0$

فإن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0}$$

3) أ) الدالة $t\to\dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ متصلة على المجال $]1,+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

نستنتج أن $\forall x>1;\ g(x)=\varphi\left(x^2\right)-\varphi(x)$

بما أن φ قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ فإن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ كمركب دوال قابلة للإشتقاق

و لدينا $(\forall x>1);\ g'(x)=2x\varphi'\left(x^2\right)-\varphi'(x)=2x\dfrac{1}{x\ln x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

و منه

$$\boxed{\forall x>1;\ g'(x)=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)}$$

ب) لدينا: $(\forall x\ge 1);1\le\sqrt{x}\le x\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)\le h\left(\sqrt{x}\right)\le h(1)\overset{(h(x)>0)}{\Rightarrow}\dfrac{1}{2}h(x)\le\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)\le\dfrac{h(1)}{2}\Rightarrow 0<g'(x)\le\dfrac{1}{2}$

إذن

$$\boxed{\forall x\ge 1;0<g'(x)\le\frac{1}{2}}$$

و منه جدول تغيرات الدالة g

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\ln 2\ \nearrow\ +\infty$

ج) منحنى الدالة g

الجزء الثالث

I 1) الدالة قابلة للإشتقاق على $[1,+\infty[$ و $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right);k'(x)=g'(x)-1$

و لدينا $\forall x\in[1,+\infty[;-1<g'(x)-1\le -\frac{1}{2}\Rightarrow \forall x\in[1,+\infty[;-1<k'(x)\le -\frac{1}{2}$

نستنتج أن $\forall x\in[1,+\infty[;k'(x)<0$ ومنه k تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

و بما أنها متصلة عليه فإنها تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $k([1,+\infty[)$ مع $k([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}k(x),k(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$) و $k(1)=\ln 2$

نستنتج أن $k([1,+\infty[)=]-\infty,\ln 2]$

و منه

$\boxed{k \text{ تقابل من } [1,+\infty[\text{ نحو }]-\infty,\ln 2]}$

2) بما أن $0\in]-\infty,\ln 2[$ فإن ل 0 سابق وحيد α بالدالة k من المجال $]1,+\infty[$

إذن $k(\alpha)=0$ ومنه $g(\alpha)-\alpha+1=0$

نستنتج أ نه

$\boxed{\exists!\alpha\in]1,+\infty[/1+g(\alpha)=\alpha}$

II (1 أ) برهان بالترجع

لدينا $1\le u_0<\alpha$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $1\le u_n<\alpha$.

لدينا

$$\begin{aligned}1\le u_n<\alpha &\overset{(g\nearrow)}{\Rightarrow} g(1)\le g(u_n)<g(\alpha)\\ &\Rightarrow \ln 2\le u_{n+1}-1<\alpha-1\\ &\Rightarrow \ln 2+1\le u_{n+1}<\alpha\\ &\Rightarrow 1\le u_{n+1}<\alpha\end{aligned}$$

إذن حسب مبدأ الترجع

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N};1\le u_n<\alpha}$

ب) لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n=k(u_n)$

كما لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_n<\alpha \overset{(k\searrow)}{\Rightarrow} k(u_n)>k(\alpha)$

وبما أن $k(\alpha)=g(\alpha)-\alpha+1=0$

نستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-u_n>0$

و منه

$\boxed{(u_n)\ \text{متتالية تزايدية قطعا}}$

ج) (u_n) متتالية تزايدية قطعا و مكبورة ب α إدن فهي متقاربة و لتكن l نهايتها

لدينا $\forall n\in\mathbb{N};1\le u_n<\alpha\Rightarrow l\ge 1$ و بما أن g متصلة على $[1,+\infty[$ فإن g متصلة عند l

إذن $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=1+g(u_n)\Rightarrow l=1+g(l)\Rightarrow k(l)=0\Rightarrow l=\alpha$

و بالتالي

$$\boxed{\lim u_n=\alpha}$$

2) أ) لدينا $\forall n\in\mathbb{N};[u_n,\alpha]\subset[1,+\infty[$

إدن g متصلة على $[u_n,\alpha]$ و قابلة للإشتقاق على $]u_n,\alpha[$ و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists c\in\,]u_n,\alpha[;\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}=g'(c)$$

و بما أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $1\le u_n<c<\alpha\Rightarrow c>1\Rightarrow 0<g'(c)\le\frac{1}{2}\Rightarrow|g'(c)|\le\frac{1}{2}$

فإن $\forall n\in\mathbb{N};\left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|g'(c)|\le\frac{1}{2}$ ما يستلزم أن $|g(u_n)-g(\alpha)|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

و بما أن $(\forall n\in\mathbb{N});g(u_n)-g(\alpha)=u_{n+1}+1-\alpha+1=u_{n+1}-\alpha$

فإن

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N};\quad |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$$

ب) برهان بالترجع

من أجل $n=0$ العلاقة تكتب $|u_0-\alpha|\le|u_0-\alpha|$ وهذا صحيح

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ و نبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\ \le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|\Rightarrow|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

وبالتالي و حسب مبدأ الترجع

$$\boxed{\forall n\ge 0;|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|}$$

ج) بما أن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ فإن $\lim|u_n-\alpha|=0$

نستنتج أن

$$\boxed{\lim u_n=\alpha}$$

مرحب بملاحظاتكم عبر العنوان : $y\_mghazli@hotmail.com$

إنتهى