المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
الموضوع

NS24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين والمسألة حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية....................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات..........................(3ن)
- المسألة تتعلق بالتحليل.....................................(10ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1- نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي: $x*y=x+y-2$; $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$

أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . 0.5

ب) بين أن $(\mathbb{Z},*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

ج) بين أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية . 0.5

2- نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي: $x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6$; $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$

ونعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي: $f(x)=x+2$; $(\forall x\in\mathbb{Z})$

أ) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$ 0.5

ب) بين أن: $(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$; $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)$ 0.25

3- استنتج من كل ما سبق أن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية و واحدية. 0.75

4- أ) بين أن: $x\mathrm{T}y=2$ إذا و فقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$ 0.25

ب) استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ كاملة . 0.25

ج) هل $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ جسم ؟(علل جوابك) 0.25

التمرين الثاني: (3.5 نقط)

I - ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : (E): $2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$ 0.25

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) 0.5

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي a و $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z

ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع : $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$ (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

1- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع. 0.5

0.5 | 2- أ) بين أن : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0.5 | ب) بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع.

3- نفترض أن $M\neq A$ و $M\neq B$

0.5 | أ) بين أن: $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}$

0.75 | ب) بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة.

التمرين الثالث: (3 نقط)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية :

$$(R):\ 3^n-2^n\equiv 0\ [n]$$

1- نفترض أن n يحقق الخاصية (R) و ليكن p **أصغر قاسم أولي موجب** للعدد n

0.75 | أ) بين أن : $3^n-2^n\equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p\geq 5$

0.5 | ب) بين أن: $2^{p-1}\equiv 1\ [p]$ و $3^{p-1}\equiv 1\ [p]$

0.5 | ج) بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $an-b(p-1)=1$

0.5 | د) ليكن r و q باقي و خارج القسمة الاقليدية للعدد a على $p-1$

$\left(q\in\mathbb{Z}\right.$ و $\left.0\leq r<p-1\right)$ حيث: $a=q(p-1)+r$

بين أنه يوجد **عدد صحيح طبيعي** k بحيث : $rn=1+k(p-1)$

0.75 | 2- استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية (R)

مسألة: (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $h(1)=1$ و $(\forall x>1)\ ;\ h(x)=\frac{x-1}{x\ln x}$

الجزء الأول:

0.25 | 1- أ) بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1

0.75 | ب) بين أن: $(\forall x>1)\ ;\ \ln x<x-1$ ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

0.5 | 2- أ) احسب $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h

0.25 | ب) استنتج أن: $(\forall x\geq 1)\ ;\ 0<h(x)\leq 1$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $g(1)=\ln 2$ و $(\forall x>1)\ ;\ g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 — 1- أ) تحقق أن : $\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2 \quad ; \quad (\forall x>1)$

0.25 — ب) تحقق أن : $g(x)-\ln 2 = \int_{x}^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt \quad ; \quad (\forall x>1)$

0.5 — ج) بين أن : $g(x)-\ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt \quad ; \quad (\forall x>1)$

0.5 — 2- أ) بين أن: $\left(x-\sqrt{x}\right)h(x) \le g(x)-\ln 2 \le \left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right) \quad ; \quad (\forall x>1)$

0.5 — ب) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

0.75 — ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0.75 — 3- أ) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ و أن: $g'(x) = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right) \quad ; \quad (\forall x>1)$

0.5 — ب) استنتج أن: $0 < g'(x) \le \frac{1}{2} \quad ; \quad (\forall x \ge 1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

0.5 — ج)أنشئ المنحنى (C)

الجزء الثالث:

0.5 — **I**- 1- بين أن الدالة $k : x \mapsto g(x)-x+1$ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو المجال $]-\infty,\ln 2]$

0.25 — 2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,+\infty[$ بحيث : $1+g(\alpha)=\alpha$

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بما يلي: $1 \le u_0 < \alpha$ و $u_{n+1} = 1+g(u_n) \quad (\forall n\ge 0)$

0.5 — 1- أ) بين أن: $1 \le u_n < \alpha \quad ; \quad (\forall n \ge 0)$

0.5 — ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تزايدية قطعا.

0.75 — ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة و أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

0.5 — 2- أ) بين أن: $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right| \quad ; \quad (\forall n\ge 0)$

0.5 — ب) بين أن: $\left|u_n-\alpha\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0-\alpha\right| \quad ; \quad (\forall n \ge 0)$

0.25 — ج) استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

انتهى