



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2012  
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	NS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين الأول: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ في الحلقة الواحدية } (M_3(\mathbb{R}), +, \times), \text{ نعتبر المصفوفتين}$$

(1) احسب  $I - A$  و  $A^2$  0.75(2) استنتج أن  $A$  تقبل مقلوبا المطلوب تحديده. 0.5**II** - لكل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  من المجال  $I = ]1, +\infty[$  نضع:  $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$ (1) تحقق أن  $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$  ;  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  0.25(2) بين أن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $I$  0.5(3) نذكر أن  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$  زمرة تبادلية.نعتبر التطبيق  $\varphi: \mathbb{R}^{**} \rightarrow I$   
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$ أ- بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$  نحو  $(I, *)$  0.5ب- استنتج بنية  $(I, *)$  0.25ج- بين أن المجموعة  $\Gamma = \left\{ \sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{R} \right\}$  زمرة جزئية من  $(I, *)$  0.75**التمرين الثاني: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .**I** - نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$  حيث  $a$  عدد عقدي غير منعدم.(1) حدد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$  0.75(2) أ- تحقق أن:  $z_1 z_2 = a^2(i-1)$  0.25ب- بين أن:  $z_1 z_2$  عدد حقيقي  $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$  0.5**II** - ليكن  $c$  عددا حقيقيا غير منعدم و  $z$  عددا عقديا غير منعدم.(1) أ- بين أن:  $A$  و  $D$  و  $M$  مستقيمية  $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$  (لاحظ أن  $c = \bar{c}$ ) 0.5ب- بين أن:  $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$  0.5(2) ليكن  $h$  لحد النقطة  $H$ ، المسقط العمودي للنقطة  $O$  على  $(AD)$ أ- بين أن:  $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$  0.75ب- استنتج أن:  $(CH) \perp (BH)$  0.25

**التمرين الثالث: (3 نقطة)**نعتبر في  $\square^2$  المعادلة  $(E) : 143x - 195y = 52$ 

- 1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 واستنتج أن المعادلة  $(E)$  تقبل حولا في  $\square^2$  0.5  
ب- علما أن الزوج  $(-1, -1)$  حل خاص للمعادلة  $(E)$  ، حل في  $\square^2$  المعادلة  $(E)$  مبرزا مراحل الحل . 0.75

2) ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع 5 0.5  
بين أن لكل  $k$  من  $\square$  لدينا:  $[5] n^{4k} \equiv 1$

3) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث:  $[4] x \equiv y$

أ- بين أن لكل  $n$  من  $\square^*$  لدينا:  $[5] n^x \equiv n^y$  0.5

ب- استنتج أن لكل  $n$  من  $\square^*$  لدينا:  $[10] n^x \equiv n^y$  0.5

4) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج  $(x, y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  0.25  
بين أنه لكل  $n$  من  $\square^*$  ، العددين  $n^x$  و  $n^y$  لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

**التمرين الرابع: (5.5 نقطة)**

$n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على  $\square$  بما يلي:  $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ليكن  $(C_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $f_n$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  0.5

2) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_n)$  بجوار  $-\infty$  0.5

ب- بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_n)$  بجوار  $+\infty$  ، وحدد الوضع النسبي 0.5  
للمنحنى  $(C_n)$  و  $(D)$

3) ادرس تغيرات الدالة  $f_n$  ثم ضع جدول تغيراتها . 0.75

4) أنشئ المنحنى  $(C_3)$  ( نأخذ  $f_3(-1,5) \square 0$  و  $f_3(-0,6) \square 0$  و  $f_3(1,1) \square \ln 3$  ) 0.75

5) أ- بين أنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن  $\frac{e}{n} < \ln n$  0.25

ب- بين أنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين  $x_n$  و  $y_n$  حيث : 1

$$-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{و} \quad x_n \leq -\ln n$$

ج- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$  0.5

6) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

أ- بين أن الدالة  $g$  متصلة على اليمين في 0 0.25

$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n} : n \geq 3 \text{ لكل } 0.25$$

$$\text{ج- استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n} 0.25$$

### التمرين الخامس: (4.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $[0,1]$  بما يلي :  $F(0) = 1$  و  $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$  لكل  $x$  من  $]0,1[$

$$(1) \text{ ليكن } x \text{ من } [0,1]. \text{ بين أن لكل } t \text{ من } [0,x] \text{ لدينا : } \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 0.25$$

(2) ليكن  $x$  من  $]0,1[$

$$\text{أ- بين أن } F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt : 0.5$$

ب- بين أن :  $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$  ثم استنتج أن الدالة  $F$  متصلة على اليمين في الصفر . 0.75

$$(3) \text{ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل } x \text{ من } [0,1] : \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt : 0.75$$

(4) ليكن  $x$  من  $]0,1[$

$$\text{أ- بين أن } F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt : 0.5$$

ب- بين أن  $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$  ( يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1 ) 0.75

ج- بنطبق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة  $F$  في المجال  $[0,x]$  بين أن : 0.75

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د- استنتج أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددًا عددها المشتق على اليمين في 0 0.25

انتهى الموضوع