المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2013
الموضوع

RS24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية......................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بحساب الاحتمالات ....(3ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................(8.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل..........................(1.75ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)(الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما)

I - لكل x و y من المجال $G=]1,2[$ نضع: $x*y=\dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0.5 1- بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G

2- نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G المعرف بما يلي: $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$

0.75 أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$

0.5 ب) استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .

II - نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ووحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

و أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.5 1- أ) تحقق أن: $A^3=O$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$.

0.5 ب) تحقق أن: $(A^2-A+I)(A+I)=I$ ثم استنتج أن المصفوفة $A+I$ تقبل مقلوبا في $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده.

0.75 2 – لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع $M(a,b)=aI+bA$ و نعتبر المجموعة $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وحدد أساسا له.

التمرين الثاني: (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I- نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال أربع كرات من الصندوق ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق.

1 1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

0.5 2) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

II- نقوم بالتجربة العشوائية التالية في 3 مراحل كالآتي:

المرحلة 1: نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق.

المرحلة2: نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى.

المرحلة 3: نسحب بالتتابع وبدون إحلال 3 كرات من الكيس الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية.

نعتبر الأحداث التالية:

N "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء"

R "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء"

E "جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء"

0.5 1) بين أن : $p(E\cap N)=\dfrac{12}{55}$

0.5 2) احسب $p(E)$

0.5 3) احسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق.

التمرين الثالث: (3.5 ن)

I - ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E): 2z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$

0.5 1) بين أن: $z_1=\dfrac{(a-1)}{2}(1+i)$ و $z_2=\dfrac{(a-1)}{2}(1-i)$ هما حلي المعادلة (E)

2) نأخذ : $a=e^{i\theta}$ حيث $0<\theta<\pi$

0.5 أ- بين أن: $a-1=2\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1 ب- استنتج الشكل المثلثي لكل حل من الحلين z_1 و z_2

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نفترض أن: $\mathrm{Re}(a)<0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$

0.5 1) حدد لحقي كل من J و K منتصفي $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a

2) ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J وقياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و r_2 الدوران الذي مركزه K وقياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

نضع $C'=r_1(C)$ و $A'=r_2(A)$ و ليكن c' لحق C' و a' لحق A'

0.5 بين أن: $a'=z_1$ و $c'=z_2$

0.5 3) أحسب $\dfrac{a'-c'}{a-1}$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع: (8.25 ن)

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2 x}} \\ f(0)=1 \end{cases}$

0.5 أ- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2 x=0$)

0.5 ج - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن: $f'(x)=\dfrac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+x^2\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$; $(\forall x>0)$

0.5 د - ضع جدول تغيرات الدالة f

2) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

وليكن (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ - حدد دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $\left[e,+\infty\right[$ — 0.25

ب - بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t\leq\sqrt{1+t^2\ln^2 t}\leq\sqrt{2}\ t\ln t$ — 0.5

ج - بين أن : $(\forall x\geq e)\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)\leq\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2 t}}dt\leq\ln(\ln x)$ — 0.75

د- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$ — 0.5

ه - بين أن (C_F) يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما. — 0.5

ز - أنشئ (C_F) (نأخذ $F(1)\approx 0,5$ و $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\approx 0,4$) — 1

3) لكل x من $\left[0,+\infty\right[$ نضع : $\varphi(x)=x-F(x)$

أ - بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ — 0.75

ب - بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $\left[0,+\infty\right[$ — 0.5

ج - بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n\geq n$ ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ — 0.5

4) أ- بين أن: $(\forall n\geq 1)\ ;\ 0\leq\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية) — 0.5

ب - احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$ — 0.5

التمرين الخامس: (1.75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n=\left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n=\ln(u_n)$

1) تحقق أن: $(\forall n\geq 1)\ ;\quad v_n=n^2\left(\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))\right)$ — 0.25

2) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن : $(\forall n\geq 1)(\exists c\in\left]n,n+1\right[);\ v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$ — 0.5

3) بين أن: $(\forall n\geq 1)\ ;\quad \dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$ — 0.5

4) احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ — 0.5

انتهى