

<p style="text-align: center;">امتحانات وطنية</p>	<p style="text-align: center;">تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية</p>	<p style="text-align: center;">السنة 2 بكالوريا علوم رياضية</p>	
<b>تمرين 1:</b>			
$(E): z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$			
$\Delta = (5+i\sqrt{3})^2 - 4(4+4i\sqrt{3}) = 25 + 10i\sqrt{3} - 3 - 16 - 16i\sqrt{3} = 6 - 6i\sqrt{3} = 9 - 6i\sqrt{3} - 3 = (3-i\sqrt{3})^2$	أ	1	
$a = \frac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3} \quad , \quad b = \frac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2} = 4$	ب		
$b = (1-i\sqrt{3})a$ : إذن $a(1-i\sqrt{3}) = (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = 1+3 = 4 = b$	ج		
<p>أ) الصيغة العقدية للدوران <math>R\left(A, \frac{f}{2}\right)</math> هي: <math>z' = e^{\frac{f}{2}i}(z-a) + a = i(z-a) + a</math> ، بما <math>B_1 = R(O)</math> أن فإن:</p> <p><math>b_1 = i(0-a) + a = -ia + a = -i(1+i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} = -i - \sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)</math></p>	أ	2	
<p>ب) الصيغة العقدية للتحاكي <math>h</math> هي: <math>z' = k(z-a) + a = \sqrt{3}(z-a) + a</math> : لتكن <math>B'_1 = R(B_1)</math> إذن: <math>b'_1 = \sqrt{3}(b_1 - a) + a = \sqrt{3}(-ia) + a = a(1-i\sqrt{3}) = b</math> : إذن <math>B'_1 = B</math> : منه <math>B'_1 = B</math></p>	ب		
<p>لدينا: <math>\frac{b}{b-a} = \frac{b}{a-i\sqrt{3}a-a} = \frac{b}{-a\sqrt{3}i} = \frac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e^{-\frac{f}{3}i}}{e^{\frac{f}{2}i}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{f}{6}i}</math></p> <p>بالتالي: <math>\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{f}{6}[2f]</math></p>	ج		
<p>د) بما أن <math>C</math> تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث <math>OAB</math> فإن النقط <math>O</math> و <math>A</math> و <math>B</math> و <math>C</math> متداورة</p> <p>منه: <math>\frac{c-0}{c-a} \div \frac{b-0}{b-a} \in IR</math> : منه <math>\arg\left(\frac{c-0}{c-a} \div \frac{b-0}{b-a}\right) \equiv 0[f]</math> : منه <math>\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv 0[f]</math></p> <p>منه: <math>\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{f}{6}[f]</math></p>	د		
<b>تمرين 2:</b> $x^{1439} \equiv 1436[2015]$			
بما أن: $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن: $1436 \wedge 2015 = 1$			1
لدينا: $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ إذن: $\exists k \in Z / x^{1439} - 2015k = 1436$ : لدينا $d/x$ و $d/2015$ منه: $d/x^{1436}$ و $d/2015k$ منه: $d/x^{1439} - 2015k$ بالتالي: $d/1436$			أ
نضع: $x \wedge 2015 = d$ ، إذن $d/x$ و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق: $d/1436$			2
إذن: $d/1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ ولدينا: $d/2015$ إذن: $d/2015 \times 749$ إذن: $d/1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ منه: $d/1$ ، وبما أن: $d > 0$ فإن: $d = 1$ ، بالتالي: $x \wedge 2015 = 1$			ب
<p>لدينا: <math>2015 = 5 \times 13 \times 31</math> ، بما أن: <math>x \wedge 2015 = 1</math> فإن: <math>x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1</math> إذن: <math>x \wedge 5 = 1</math></p> <p><math>x \wedge 13 = 1</math> : بالتالي: <math>x \wedge 31 = 1</math></p>			أ
<p>إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن: <math>x^4 \equiv 1[5]</math> : <math>(x^4)^{360} \equiv 1[5]</math> : <math>x^{1404} \equiv 1[5]</math></p> <p>إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن: <math>x^{12} \equiv 1[13]</math> : <math>(x^{12})^{120} \equiv 1[13]</math> : <math>x^{1404} \equiv 1[13]</math></p> <p>إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن: <math>x^{30} \equiv 1[31]</math> : <math>(x^{30})^{48} \equiv 1[31]</math> : <math>x^{1404} \equiv 1[31]</math></p>			3

	<p>لدينا : <math>\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \end{cases}</math> إذن : <math>\begin{cases} 5/x^{1404} - 1 \\ 13/x^{1404} - 1 \end{cases}</math> منه : <math>(5 \vee 13)/x^{1404} - 1</math> أي : <math>65/x^{1404} - 1</math> أي : <math>x^{1404} \equiv 1[65]</math></p> <p>مرة أخرى لدينا : <math>\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[65] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}</math> إذن : <math>\begin{cases} 65/x^{1404} - 1 \\ 31/x^{1404} - 1 \end{cases}</math> منه : <math>(65 \vee 31)/x^{1404} - 1</math> أي : <math>2015/x^{1404} - 1</math> أي : <math>x^{1404} \equiv 1[2015]</math></p>	ب
	<p>لدينا : <math>x^{1404} \equiv 1[2015]</math> و <math>x^{1440} \equiv 1436x[2015]</math> منه : <math>x^{1439} \equiv 1436[2015]</math> إذن : <math>1436x \equiv 1[2015]</math> <math>\exists r \in \mathbb{Z} / 1436x - 2015r = 1</math> منه : <math>1436x - 2015r = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749</math> منه : <math>1436(x - 1051) = 2015(r - 749)</math> منه : <math>1436x - 2015r = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749</math> منه : <math>2015/1436(x - 1051)</math> ، و بما أن : <math>2015 \wedge 1436 = 1</math> فإن <math>2015/(x - 1051)</math> أي : <math>x \equiv 1051[2015]</math></p>	4
تمرين 3 :		
	<p><math>\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)</math> ، <math>E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}</math> ، <math>M(x) = \begin{pmatrix} 1-x &amp; x \\ -2x &amp; 1+2x \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\{ : \mathbb{R} \rightarrow E</math>  <math>x \mapsto \{ (x) = M(x-1)</math></p>	
	<p>لدينا : <math>\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \{ (x+y) = M(x+y-1)</math> و <math>\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \{ (x)T\{ (y) = M(x-1)TM(y-1) = M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)</math> إذن : <math>\{ (x+y) = \{ (x)T\{ (y)</math> <math>\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2</math> ، إذن : <math>\{</math> تشاكل من <math>(\mathbb{R}, +)</math> نحو <math>(E, T)</math></p>	أ
	<p>لدينا <math>\forall x \in \mathbb{R} \quad \{ (x+1) = M(x)</math> إذن <math>\forall m \in \mathbb{R} / \{ (m) = M</math> أي أن <math>\{</math> شمول أي : <math>(\mathbb{R}) = E</math> إذن و بما أن : <math>(\mathbb{R}, +)</math> زمرة تبادلية فإن <math>(E, T)</math> زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو : <math>\{ (0) = M(-1)</math></p>	ب
	<p>لدينا لكل <math>(x, y) \in \mathbb{R}^2</math> :</p> $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) - 2xy & y(1-x) + x(1+2y) \\ -2x(1-y) - 2y(1+2x) & -2xy + (1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$ $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$ $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$ <p><math>M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)</math></p>	أ
	<p>بما أن : <math>(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x+y+xy \in \mathbb{R}</math> فإن : <math>(M(x), M(y)) \in E^2 \Rightarrow M(x+y+xy) \in E \Rightarrow M(x) \times M(y) \in E</math> إذن <math>E</math> جزء مستقر من <math>(M_2(\mathbb{R}), \times)</math> ، ولدينا أيضا :</p> <p><math>\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy) = M(y+x+xy) = M(y) \times M(x)</math> أي أن القانون <math>\times</math> تبادلي</p>	ب
	<p>لدينا : لكل <math>(x, y, z) \in \mathbb{R}^3</math> :</p> $M(x) \times (M(y)TM(z)) = M(x) \times M(y+z+1) = M(x+y+z+1+x(y+z+1))$ $M(x) \times (M(y)TM(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$ <p>و <math>(M(x) \times M(y))T(M(x)TM(z)) = M(x+y+xy)TM(x+z+xz) = M(x+y+xy+x+z+xz+1)</math></p> $(M(x) \times M(y))T(M(x)TM(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$ <p>منه : <math>M(x) \times (M(y)TM(z)) = (M(x) \times M(y))T(M(x)TM(z))</math> و لكون القانونين <math>\times</math> و <math>T</math> تبادليان فإن : <math>(M(y)TM(z)) \times M(x) = (M(y) \times M(x))T(M(z)TM(x))</math> إذن : <math>\times</math> توزيعي بالنسبة لـ <math>T</math> في <math>E</math></p>	ج
	<p>لدينا : <math>\forall x \in \mathbb{R} \quad M(x)TM(-1) = M(-1)TM(x) = M(x-1+1) = M(x)</math></p>	د

إذن  $M(-1)$  هي العنصر المحايد في  $(E, T)$   
ولدينا:  $M(0) = I$  و  $M(x) \times M(0) = M(0) \times M(x) = M(x+0+0) = M(x)$  ،  
إذن:  $I$  هي العنصر المحايد في  $(E, \times)$

أ) لدينا:  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = M\left(x - \frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x}\right) = M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right) = M(0) = I$

ب) لدينا:  $(E, T)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد:  $M(-1)$   
القانون  $\times$  قانون تركيب داخلي تبادلي في  $E$  و تجميعي لأن  $E \subset M_2(\mathbb{R})$  و  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$  تجميعي  
القانون  $\times$  توزيعي بالنسبة لـ  $T$  في  $E$  و له عنصر محايد هو:  $I = M(0)$   
إذن:  $(E, T, \times)$  حلقة واحدة، و بما أن لكل  $M(x) \in E - \{M(-1)\}$  مماثلاً بالنسبة للقانون  $\times$  هو  
إذن:  $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$  فإن  $(E, T, \times)$  جسم تبادلي

التمرين الرابع:

الجزء الأول:  

$$\begin{cases} f(x) = x(1 + \ln^2 x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \ln^2 x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln^2 x) = +\infty$  (لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln^2 x) = +\infty$ )  
و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln^2 x) = +\infty$   
ما يعني أن  $(C)$  يقبل فرعاً شلجماً باتجاه محور الأرتاب جوار  $+\infty$

أ) لدينا:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + x \ln^2 x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + (\sqrt{x} \ln x)^2 = 0 + 0^2 = 0 = f(0)$   
إذن  $f$  متصلة يمين الصفر

للتذكير:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^r \ln(x) = 0$  حيث  $r \in \mathbb{Q}^{*+}$  (في حالتنا:  $r = \frac{1}{2}$ )

ب) لدينا:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  (لأن:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 + \ln^2 x = +\infty$ )  
إذن  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$  ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر ، لكن المنحنى  $(C)$   
يقبل نصف مماس عمودي في النقطة  $O$  له نفس منحنى المتجهة  $\vec{j}$

ليس من الضروري تحديد منحنى نصف المماس ، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقاً

المنحنى نعرفه انطلاقاً من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية (في حالتنا  $\rightarrow +$ )  $(+) \times (+) \rightarrow +$  أي الأعلى أي منحنى  $\vec{j}$


ج) لدينا:  $\forall x > 0 \quad f'(x) = 1 + \ln^2 x + x \left( 2 \ln x \times \frac{1}{x} \right) = 1 + \ln^2 x + 2 \ln x = (\ln x + 1)^2$

لدينا:  $\forall x > 0 \quad (\ln x + 1)^2 \geq 0$  ، و  $(\ln x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

إذن  $f'(x)$  موجبة على  $]0; +\infty[$  و تنعدم في عدد وحيد ، إذن  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0; +\infty[$

الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين:

- أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعاً أو موجبة قطعاً على كل المجال
- أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد محدود من الحلول (حل، حلان...)

	<p>لدينا لكل <math>f''(x) = 2(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1) : x \in ]0; +\infty[</math></p> <p>ولدينا: <math>\ln x + 1 &gt; 0 \Leftrightarrow x &gt; e^{-1}</math> و <math>\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}</math></p> <p>إذن: <math>f''(x)</math> تنعدم و تغير إشارتها في <math>e^{-1}</math> إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها <math>e^{-1}</math></p>	أ
	<p>لدينا لكل <math>f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1</math> و <math>f(x) - x = x \ln^2 x \geq 0 : x \in ]0; +\infty[</math></p> <p>إذن (C) يوجد فوق المستقيم <math>y = x</math> (D) و يقطعه في النقطة <math>A(1; 1)</math></p>	ب
	<p>دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع</p>  <p>الشكل تم إنشاؤه باستخدام برنامج الموقع : <a href="#">Super Graph</a></p>	ج
	<p>الجزء الثاني:</p> $\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$	
رياضيات www.naia7math.com	<p>1 نعلم أن: <math>e &gt; 1</math> إذن: <math>\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} &lt; 1</math> أي: <math>\frac{1}{e} \leq u_0 &lt; 1</math></p> <p>نفترض أن: <math>\frac{1}{e} \leq u_n &lt; 1</math>، إذن: <math>f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) &lt; f(1)</math> (لأن <math>f</math> تزايدية على <math>]0; +\infty[</math>)</p> <p>منه: <math>\frac{2}{e} \leq u_{n+1} &lt; 1</math> منه: <math>\frac{1}{e} \leq u_{n+1} &lt; 1</math> (لأن: <math>\frac{1}{e} &lt; \frac{2}{e}</math>)، إذن حسب مبدأ التراجع: <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{e} \leq u_n &lt; 1</math></p>	1
	<p>لدينا: <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n)</math></p> <p>ولدينا: <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{e} \leq u_n &lt; 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \ln(u_n) &lt; 0 \\ u_n &gt; 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \ln^2(u_n) &gt; 0</math></p> <p>إذن: <math>(u_n)_n</math> متتالية تزايدية قطعاً، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.</p> <p>يمكن أيضا استعمال السؤال 3 ب) من الجزء الأول</p>	2

		أ) لدينا: $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ ، إذن: $\frac{1}{e} \leq l \leq 1$	
	3	ب) لدينا: الدالة $f$ متصلة على $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ و $\left[\frac{1}{e}; 1\right] \subset \left[\frac{2}{e}; 1\right] \subset \left[\frac{1}{e}; 1\right]$ والمتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها $l$ إذن $l$ تحقق المعادلة $f(x) = x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط $0$ و $1$ ولكون: $\frac{1}{e} \leq l \leq 1$ ، فإن: $l = 1$	
		الجزء الثالث: $\forall x \in [0; +\infty[ \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt$	
		لدينا لكل $x \in ]0; +\infty[$	
	أ)	$H'(x) = \left( \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x \right)' = \frac{-2}{4}x + \frac{1}{2} \left( 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{2}x + x \ln x + \frac{1}{2}x = x \ln x = h(x)$ إذن الدالة $H$ هي دالة أصلية للدالة $h$	
		لدينا لكل $x \in ]0; +\infty[$	
	ب)	$\int_1^x t \ln^2(t) dt = \int_1^x \left( \frac{1}{2}t^2 \right)' \ln^2(t) dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \ln^2(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t^2 \cdot 2 \ln(t) \times \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t) dt$	1
		لدينا لكل $x \in ]0; +\infty[$	
	ج)	$F(x) = \int_1^x t(1 + \ln^2(t)) dt = \int_1^x t + t \ln^2(t) dt = \int_1^x t dt + \int_1^x t \ln^2(t) dt$ $F(x) = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_1^x + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \left[ \frac{-1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2 \ln t \right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \left( \frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x \right) + \left( \frac{-1}{4} \right)$ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$	
	أ)	نعلم أن الدالة $f$ متصلة على $[0; +\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية $k$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، ومنه: $F(x) = k(x) - k(1)$ ، $\forall [0; +\infty[$ ، ما يعني أن الدالة $F$ متصلة على $[0; +\infty[$	
		$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{4}$	2
	ب)	بما أن $F$ متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن: $\int_0^1 f(t) dt = -\int_1^0 f(t) dt = -F(0) = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \frac{3}{4}$	
		التمرين الخامس:	
		$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt ; x > 0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$	
	أ)	ليكن $x > 0$ ، لدينا: $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x} \Rightarrow -2x \leq -t \leq -x \Rightarrow t \in [x, 2x] \Rightarrow x \leq t \leq 2x$ إذن: $(\forall x > 0) (\forall t \in [x, 2x]) e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$	
		حسب السؤال السابق نستنتج أن: $(\forall x > 0) (\forall t \in [x, 2x]) \frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t}$ منه: $(\forall x > 0) \int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt$	1
	ب)		

<p>منه: <math>(\forall x &gt; 0) e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq g(x) \leq e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt</math> أي <math>(\forall x &gt; 0) e^{-2x} [\ln t]_x^{2x} \leq g(x) \leq e^{-x} [\ln t]_x^{2x}</math></p> <p>منه: <math>(\forall x &gt; 0) e^{-2x} (\ln 2x - \ln x) \leq g(x) \leq e^{-x} (\ln 2x - \ln x)</math></p> <p>بالتالي: <math>(\forall x &gt; 0) e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2</math></p>	
<p>بما أن <math>\lim_{x \rightarrow 0} e^{-2x} \ln 2 = \ln 2</math> و <math>\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \ln 2 = \ln 2</math> فإن <math>\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ln 2 = g(0)</math>، إذن <math>g</math> متصلة يمين 0</p>	ج
<p>بما أن الدالة <math>t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}</math> متصلة على <math>]0; +\infty[</math> فهي تقبل دالة أصلية <math>G</math> متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا، لكل <math>x &gt; 0</math> : <math>g(x) = G(2x) - G(x)</math> ، وبما أن <math>x \mapsto 2x</math> قابلة للاشتقاق على <math>]0; +\infty[</math> فإن الدالة <math>g</math> قابلة للاشتقاق على <math>]0; +\infty[</math> ولدينا :</p> $\forall x > 0 \quad g'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2 \frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$	2
<p>ليكن <math>t &gt; 0</math>، الدالة <math>p : x \mapsto e^{-x}</math> متصلة على <math>[0, t]</math> و قابلة للاشتقاق على <math>]0, t[</math> (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على <math>]0; +\infty[</math>)، إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية :</p> $\exists c_t \in ]0, t[ \quad \frac{p(t) - p(0)}{t} = p'(c_t)$ <p>ولدينا : <math>\forall x &gt; 0 \quad p'(x) = -e^{-x}</math> ، منه : <math>\frac{e^{-t} - 1}{t} = -e^{-c_t}</math> ، <math>\exists c_t \in ]0, t[</math></p> <p>ولدينا : <math>e^{-t} &lt; e^{-c_t} &lt; 1 \Rightarrow -1 &lt; -e^{-c_t} &lt; -e^{-t} \Rightarrow -1 &lt; \frac{e^{-t} - 1}{t} &lt; -e^{-t}</math> ، منه : <math>-1 &lt; \frac{e^{-t} - 1}{t} &lt; -e^{-t}</math></p> <p>بالتالي : <math>\forall t &gt; 0 \quad -1 &lt; \frac{e^{-t} - 1}{t} &lt; -e^{-t}</math> أو أيضا : <math>\forall t &gt; 0 \quad -1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}</math></p>	أ
<p>لدينا : <math>\forall t &gt; 0 \quad -1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}</math> ، منه : <math>\forall x &gt; 0 \quad \int_x^{2x} -1 dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \leq \int_x^{2x} -e^{-t} dt</math></p> <p>منه : <math>\forall x &gt; 0 \quad [-t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq [e^{-t}]_x^{2x}</math></p> <p>منه : <math>\forall x &gt; 0 \quad -2x + x \leq g(x) - \ln 2 \leq e^{-2x} - e^{-x}</math></p> <p>بالتالي : <math>\forall x &gt; 0 \quad -1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}</math></p>	3
<p>بما أن : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -2 \times 1 + 1 = -1</math></p> <p>و <math>\lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1</math> ، فإن : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \ln 2}{x} = -1</math> أي : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1</math> ، ما يعني أن <math>g</math> قابلة للاشتقاق يمين الصفر.</p>	ج