Math-Hor mathématiques secondaires

تصحيح الامتحان الوطني في الرياضيات 2012 الدورة الاستدراكية

ذ: الحسن

التمرين الأول

1) أ- لدينا: $\vec{AB}(3,0,-3)$ و $\vec{AC}(3,2,-2)$ إذن:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

إذن:

$$= 6\vec{i} - (-6+9)\vec{j} + 6\vec{k} = \boxed{6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}$$

لدينا $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ هي المتجهة المنظمية للمستوى (ABC) إذن معادلته تكتب على الشكل التالي:

$6x - 3y + 6z + d = 0$ وحيث: $A \in (ABC)$ إذن: $6(-3) - 3(0) + 6(0) + d = 0$ أي $d = 18$ ومنه

معادلة المستوى (ABC) هي: $6x - 3y + 6z + 18 = 0$ وبتقسيم العدد 3 وإنشاء تصبح المعادلة: $\boxed{2x - y + 2z + 6 = 0}$

ب- لدينا:

$$d(\Omega,(ABC)) = \frac{|2(1) - (1) + 2(1) + 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \boxed{3}.$$

وبما أن $\boxed{d(\Omega,(ABC)) = R}$ إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

2) أ- بما أن (D) عمودي على (ABC) فإن (D) موجه بالمتجهة المنظمية للمستوى (ABC) أي: $\boxed{\vec{n}(2,-1,2)}$

وحيث (D) يمر من $\Omega(1,1,1)$ فإن تمثيله البارامتري يكتب على الشكل:

$$\boxed{(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ب- لتكن $H(x,y,z)$ نقطة تماس (ABC) و (S)

وحيث أن: (D) مار من Ω وعمودي على (ABC) فإن H هي نقطة تقاطع (D) و (ABC) أي أن إحداثيات H تحقق التمثيل البارامتري لـ (D) والمعادلة الديكارتية لـ (ABC).

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (1) \quad \text{و} \quad 2x - y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

نعوض (1) في (2) فنجد: $2(1+2t) - (1-t) + 2(1+2t) + 6 = 0$

أي: $2 + 4t - 1 + t + 2 + 4t + 6 = 0$

يعني: $9t + 9 = 0$ أي $t = -1$ ونعوض قيمة t في (1) فنجد

$$H: \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

ومنه $\boxed{H(-1, 2, -1)}$.

التمرين الثاني:

1) أ-

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{8+3i-2+i}{6-7i-2+i} = \frac{6+4i}{4-6i} = \frac{6+4i}{4-6i} \times \frac{i}{i} = \frac{\cancel{6+4i}}{\cancel{4i+6}} \times i = \boxed{i}$$

ب- من خلال السؤال (1) أ- لدينا: $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |i| = 1$ أي $|c-a| = |b-a|$ أي $AC = AB$

أي أن ABC متساوي الساقين في A وحيث: $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن: ABC قائم الزاوية في A ومنه ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A.

ملاحظة: يمكن الاكتفاء بالكتابة المثلثية $i = [1, \frac{\pi}{2}]$

$AB = AC$ $(\vec{AB},\vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) أ- لدينا Ω منتصف $[BC]$ إذن: $\omega = \frac{b+c}{2}$ ومنه

$$\omega = \frac{6-7i+8+3i}{2} = \frac{14-4i}{2} = \boxed{7-2i}$$

ب- لدينا: $\boxed{z' - \omega = e^{-\frac{\pi}{2}i}(z - \omega)}$ إذن: $z' - 7 + 2i = -i(z - 7 + 2i)$

إذن: $z' = -iz + 7i + 2 + 7 - 2i = -iz + 5i + 9 = \boxed{-iz + 9 + 5i}$

ج- لنبين أن: $\boxed{c = -ia + 9 + 5i}$ لدينا: $-i(2-i) + 9 + 5i = -2i - 1 + 9 + 5i$

$= 3i + 8 = 8 + 3i = c$

إذن C صورة A بالدوران R.

التمرين الثالث

1) لدينا: من أجل $n=0$: $\boxed{u_0 = 3 > 1}$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن العبارة صحيحة من أجل n أي $u_n > 1$ ونبين أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي نبين أن: $u_{n+1} > 1$

لدينا:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n+3}{3u_n+4} - 1 = \frac{4u_n + 3 - 3u_n - 4}{3u_n+4} = \frac{u_n - 1}{3u_n+4} > 0$$

لأن $u_n > 1$ إذن: $u_n - 1 > 0$ و $3u_n + 4 > 0$ ومنه $u_{n+1} - 1 > 0$ أي $u_{n+1} > 1$

وبالتالي $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_n > 1}$

2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{\cancel{u_n} + 1 - \cancel{u_n} + 1}{u_n + 1} = \boxed{\frac{2}{u_n+1}}$$

وحيث أن $2 > 0$ و $u_n + 1 > 0$ فإن: $1 - v_n > 0$

وبالتالي: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 - v_n > 0}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ إذن: $v_n(u_n+1) = u_n - 1$ إذن: $v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

يعني $(1 - v_n)u_n = 1 + v_n$ وحيث $\forall n \in \mathbb{N}: 1 - v_n > 0$ حسب السؤال 2) أ- إذن: $\boxed{u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}}$

3) أ- لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n+3}{3u_n+4} - 1}{\frac{4u_n+3}{3u_n+4} + 1} = \frac{u_n - 1}{7u_n + 7} = \frac{1}{7} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{7} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن:

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad v_n = v_0 \times q^n = \boxed{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n = \frac{1}{2 \times 7^n}}.$$

ب- بما أن $-1 < \frac{1}{7} < 1$ فإن $\lim_{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ أي أن $\boxed{\lim_{+\infty} v_n = 0}$

وبالتالي: $\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} \frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1+0}{1-0} = 1$ فإن: $\boxed{\lim_{+\infty} u_n = 1}$

Math Hor   مع تحيات ذ: الحسن

Math-Hor
mathématiques secondaires

تصحيح الامتحان الوطني للرياضيات
الدورة الاستدراكية 2012 (22)

ذ.محسن

التمرين الرابع:

1) ليكن A الحدث: الحصول على ثلاث كرات حمراء. إذن: $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$ حيث: $card A= C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=\boxed{10}$ و $card\,\Omega = C_{12}^3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=\boxed{220}$

إذن: $P(A)=\frac{10}{220}=\boxed{\frac{1}{22}}$

2) ليكن B الحدث: الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون: إذن: $card B = C_5^3+C_4^3+C_3^3 = 10+4+1=15$

إذن: $p(B)=\frac{card B}{card\,\Omega}=\frac{15}{220}=\boxed{\frac{3}{44}}$

3) ليكن C الحدث: الحصول على كرة حمراء على الأقل: إذن: $(R\bar R\bar R$ أو $RR\bar R$ أو $RRR)$

$card C = C_5^1\times C_7^2 + C_5^2\times C_7^1 + C_5^3 = 5\times21+10\times7+10=185$

إذن: $p(C)=\frac{card C}{card\,\Omega}=\frac{185}{220}=\boxed{\frac{37}{44}}$

التمرين الخامس:

1) ليكن x من IR لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ إذن:

$$f(-x)=-x+\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\frac{\cancel{e^{-x}}(1-e^{x})}{\cancel{e^{-x}}(1+e^{x})}=-x-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=-f(x)$$

إذن الدالة f فردية يعني أن O مركز تماثل للمنحنى (C).

2) ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$x+1-\frac{2}{e^x+1}=x+\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

إذن:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}}$$

3) أ- حساب المشتقة: لكل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$

إذن: $\left(\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}\right)$ $\quad f'(x)=1+\frac{2(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$

إذن: $\left((e^x)'=e^x\right)$ $\quad f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

لدينا $f(0)=1+\frac{2e^0}{(e^0+1)^2}=1+\frac{2}{4}=\frac{3}{2}$

ب- لدينا: لكل $x\in\mathbb{R}$: $e^x>0$ و $(e^x+1)^2>0$ إذن: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ أي $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)>0$

إذن: $\boxed{f \text{ تزايدية على } \mathbb{R}}$.

ج- لدينا: $\boxed{(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)}$

وحيث: $f(0)=0$ و $f'(0)=\frac{3}{2}$ إذن: $\boxed{(T):\ y=\frac{3}{2}x}$

4) أ- لدينا: $\lim_{+\infty}e^x=+\infty$ إذن: $\lim_{+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ ولدينا: $\lim_{+\infty}x+1=+\infty$

وبما أن: $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$ إذن: $\lim_{+\infty}f(x)=\lim_{+\infty}\left(x+1-\frac{2}{e^x+1}\right)=\boxed{+\infty}$

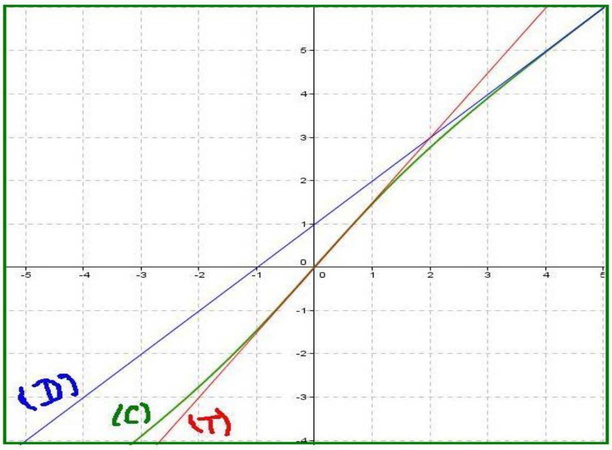
ب- لدينا: $\lim_{+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{+\infty}\frac{-2}{e^x+1}=0$ إذن: $\boxed{(D):\ y=x+1 \text{ مقارب لـ } (C) \text{ بجوار } +\infty}$

ج- لدينا:

لأن: $f(x)-(x+1)=-\frac{2}{e^x+1}<0$ لأن $e^x+1>0$ و $-2<0$ إذن:

$\boxed{(C) \text{ يوجد تحت المستقيم } (D)}$

5) إنشاء (D) و(T) و(C). أنظر الشكل



6) أ- لدينا: $H(x)=x-\ln(e^x+1)$ إذن:

$$H'(x)=1-\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

إذن: $H: x\mapsto x-\ln(e^x+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب- لدينا:

$$\int_0^{\ln2}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\left[x-\ln(e^x+1)\right]_0^{\ln2}=(\ln2-\ln(3))-(0-\ln2)$$

$$=\boxed{\ln4-\ln3}$$

ج-

$$A=\int_0^{\ln2}|f(x)-(x+1)|\,dx\times1\,cm^2$$

لأن (C) يوجد تحت (D)

$$=\int_0^{\ln2}\cancel{(x+1)}-\cancel{(x+1)}+\frac{2}{e^x+1}\,dx\times1\,cm^2$$

$$=\int_0^{\ln2}\frac{2}{e^x+1}\,dx\times1\,cm^2=\boxed{2(\ln4-\ln3)\,cm^2}$$

مع تحيات ذ.محسن Math-Hor